Aplicații ale calculului vectorial
în geometria plană

Prof. Sandu Dumitru
Liceul Tehnologic „Mihai Viteazu”
Vulcan, Hunedoara

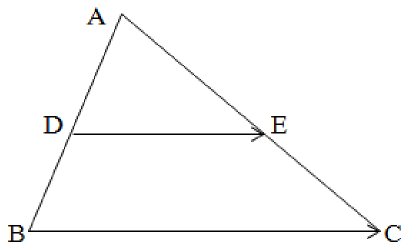
Cuprins

În acest material sunt prezentate demonstraţii ale unor teoreme de geometrie euclidiană, folosind raţionamente bazate pe modelul algebric pentru geometria lui Euclid (metoda vectorială).

1 Probleme elementare de geometrie tratate vectorial

Problema 1.1. Linia mijlocie a unui triunghi este paralelă cu a treia latură și are lungimea egală cu jumătate din lungimea aceusteia.

Demonstraţie: Fie ABC un triunghi, D mijlocul segmentului [AB] şi E mijlocul segmenlui [AC]



Avem:

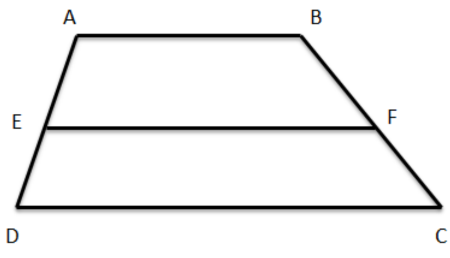
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

Deci vectorii $\overrightarrow{DE}$ şi $\overrightarrow{BC}$ au aceeaşi directive, prin urmare $\parallel BC$. În plus rezultă

$$DE = \frac{1}{2}BC$$

Problema 1.2. Linia mijlocie a unui trapez este paralelă cu bazele și are lungimea egală cu semisuma lungimilor bazelor.

Demonstraţie:



Fie E, F mijloacele laturilor neparalele [AD], [BC] ale trapezului ABCD. Avem:

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \text{ şi}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}$$

Cum $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$, însumând relaţiile de mai sus, deduce

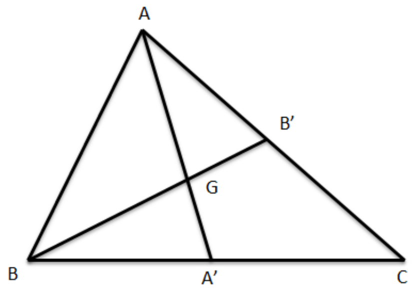
$$2\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} \qquad (1)$$

Vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ au aceeaşi directive şi sens, prin urmare $\overrightarrow{EF}$ are aceeaşi directive şi sens cu $\overrightarrow{AB}$, ceea ce implică $EF \parallel AB$. Vectorii având aceeaşi directive şi sens, din relaţia (1) rezultă egalitatea lungimilor, adică:

$$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$$

Problema 1.3. Medianele unui triunghi sunt concurente.

Demonstraţia : Fie A', B', C' mijloacele laturilor triunghiului ABC.



Deducem:

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Fie $G = AA' \cap BB'$.

Vectorii $\overrightarrow{AG}$ şi $\overrightarrow{AA'}$ fiind coliniari, există $\alpha > 0$ astfel încât $\overrightarrow{AG} = \propto \overrightarrow{AA'}$, adică $\overrightarrow{AG} = \frac{\propto}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Vectorii $\overrightarrow{BG}$ şi $\overrightarrow{BB'}$ fiind coliniari, există $\beta > 0$ astfel îcât $\overrightarrow{BG} = \beta\,\overrightarrow{BB'}$, adică $\overrightarrow{BG} = \beta\,(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$.

Însă $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$. Deducem:

$$\overrightarrow{AB} = \frac{\propto}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \beta\,(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC})$$

Echivalent cu :

$$\left(\frac{\propto}{2} + \beta - 1\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

Vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ fiind necoliniari, din ultima relaţie rezultă:

$$\begin{cases} \frac{\propto}{2} + \beta - 1 = 0 \\ \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 0 \end{cases}$$

Rezolvând sistemul se obţine $\propto = \beta = \frac{2}{3}$.

Prin urmare

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$$

Considerând apoi {G'} = AA' ∩ CC' şi raţionând similar, se obţine:

$$\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \qquad (3)$$

$$\overrightarrow{CG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$$

Deducem $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AG'}$, adică G = G', ceea ce implică concurenţa dreptelor AA', BB', CC'.

Relaţiile (2), (3) determină poziţia punctului G pe fiecare mediană. Spre exemplu $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ rezultă $\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$, de unde formularea cunoscută "centrul de greutate G este situate pe mediană la o treime de bază şi două treimi de vârf".

Problema 1.4 (Teorema cosinusului) În orice triunghi ABC, cu lungimile laturilor a, b, c, avem :

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Demonstraţie: Aplicând definiţia produsului scalar, deduce:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\|}$$

deci $\cos\widehat{BAC} = \frac{1}{bc} \cdot \langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$

Din $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ deduce:

$a^2 = \langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}\rangle = \langle\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\rangle = \langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BA}\rangle + \langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}\rangle + 2\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\rangle = b^2 + c^2 + 2\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AC}\rangle$ rezultă:

$$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle = \frac{b^2 + c^2 - a^3}{2}$$

Se obţine apoi:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

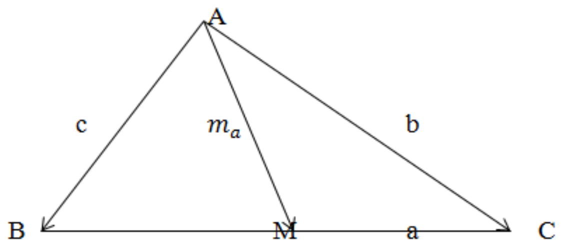
*Problema 1.5.***În** orice $\triangle ABC$ cu lungimile laturilor a, b, c și m_a lungimea medianei din A, avem:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} (*).$$

Demonstraţie: Notăm cu M mijlocul laturii AB. Din $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ deducem $4AM^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ (1); dar $2\langle\overrightarrow{AB}\,,\ \overrightarrow{AC}\rangle = 2 \cdot AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC}) = 2cb \cos A$ şi din teorema cosinusului $2bc \cdot \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - a^2$. Înlocuim în (1) se obţine

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

Obs. Formula (*) se mai numește și ≪prima teoremă a medianei≫.



2 Puncte importante în tiunghi și relații vectoriale

Teorema 2.1 G este centrul de greutate al triunghiului ABC dacă şi numai dacă

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Demonstraţie:

Pentru demonstrarea teoremei se consideră mai întâi cazul în care G este centrul de greutate al triunghiului ABC. Considerând D simetricul punctului G faţă de A; mijlocul segmenmtului [BC], implică $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{GA}$ şi $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{GB}$. Rezultă $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, echivalent cu $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Fie acum G', astfel încât $\overrightarrow{G'A}$+ $\overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = \vec{0}$. Se va arăta că G' coincide cu G. Într-adevăr

$$\overrightarrow{G'A} = \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA}$$

$$\overrightarrow{G'B} = \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GB}$$

$$\overrightarrow{G'C} = \overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GC}$$

Deci $\overrightarrow{G'A} + \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C} = 3\overrightarrow{G'G} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$, de unde $\overrightarrow{G'G} = \vec{0}$, adică G' = G

Observaţii :

1. Se observă că demonstraţia poate fi generalizată la poligoane. Punctul G este centrul de greutate al unui poligon $A_1A_2...A_n$ dacă şi numai dacă $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \cdots + \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.
2. În cursul demonstraţiei s-a arătat că pentru un punct M din planul triunghiului ABC, există relaţia $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\,\overrightarrow{MG}$ (relaţia lui Leibniz).

Teorema .2.2 (teorema lui Pappus) Fie un triunghi ABC şi punctele M, N, P situate pe BC, AC respectiv, AB astfel încât:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{CN}{NA} = \frac{AP}{PB} = k$$

Atunci triunghiurile ABC şi MNP au acelaşi centru de greutate.

Demonstraţie:

Din seria rapoartelor egale deducem:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{k}{k+1}\,\overrightarrow{AC}\,; \quad \overrightarrow{CM} = \frac{k}{k+1}\,\overrightarrow{CB}\,; \quad \overrightarrow{BP} = \frac{k}{k+1}\,\overrightarrow{BA}$$

Fie G centrul de greutate al triunghiului ABC. Se va arăta că G este centrul de greutate şi pentru triunghiul MNP. Pentru aceasta este suficient să se demonstreze că:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

Dar:

$$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CM}\,; \quad \overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AN}\,; \quad \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BP}$$

De unde rezultă:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \frac{k}{k+1}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\right)$$

Adică:

$$\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} + \overrightarrow{GP} = \vec{0}$$

şi demonstraţia teoremei este terminată.

Observaţie: Teorema lui Pappus se poate generaliza construind în exterior pe laturile triunghiului, triunghiuri asemenea cu cel dat. Triunghiul determinat de cele trei vârfuri din exterior are acelaşi centru de greutate cu triunghiul ABC.

Teorema 2.3 În orice triunghi înălţimile sunt concurente

Demonstraţie:

Fie înălţimile AM şi CP şi H punctul lor de intersecţie. Se uneşte B cu H şi se prelungeşte segmentul [BH] până în N ∈ AC. Atunci

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}.$$

Relaţiile AM ⊥ BC şi CP ⊥ AP sunt echivalente cu

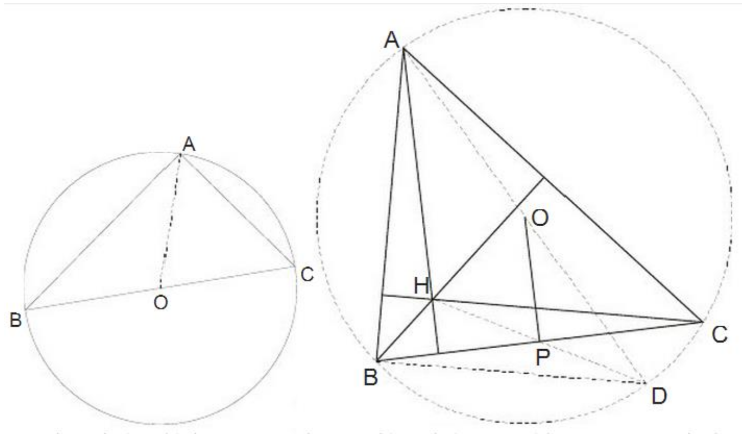
$$\overrightarrow{HA} \cdot \left(\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}\right) = \vec{0}, \qquad \overrightarrow{HC} \cdot \left(\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}\right) = \vec{0}.$$

Aceste două egalităţi implică $\overrightarrow{HB} \cdot \left(\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC}\right) = \vec{0}$, adică $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CA} = \vec{0}$ sau HN ⊥ CA.

Teorema 2.4 (teorema lui Sylvester) Dacă O şi H sunt centrul cercului circumscris, respectiv ortocentrul unui triunghi ABC, atunci are loc relaţia : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Demonstraţie:

În cazul când triunghiul ABC este dreptunghic relaţia este evidentă. De exemplu dacă $m(\hat{A}) = 90^o$ atunci H = A şi O este mijlocul lui [BC], iar relaţia se reduce la $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



Fie D punctul diametral opus lui A în cercul circumscris şi P mijlocul laturii [BC].

Patrulaterul BHCD are laturile opuse paralele (BH ⊥ AC şi DC ⊥ AC, deci BH ∥ DC; analog, CH ⊥ AB şi DB ⊥ AB, deci CH ∥ DB), deci este paralelogram. Rezultă că mijlocul diagonalei [HD] coincide cu mijlocul P al laturii [BC].

În triunghiul AHD, OP este linie mijlocie, deci $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OP}$. Cum OB = OC rezultă $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OP}$, deci $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AH}$ sau $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$, de unde

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} .$$

Teorema 2.5 Într-un triunghi centrul cercului circumscris, centrul de greutate şi ortocentrul sunt puncte coliniare.

Demonstratie:

Fie ABC un triunghi şi O, G, H punctele specificate. Din relaţia lui Leibniz avem

$$3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$$

Pentru M = O se obţine că

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

Aşadar vectorii $\overrightarrow{OG}$ şi $\overrightarrow{OH}$ sunt vectori coliniari, deci punctele O, G, H sunt puncte coliniare şi

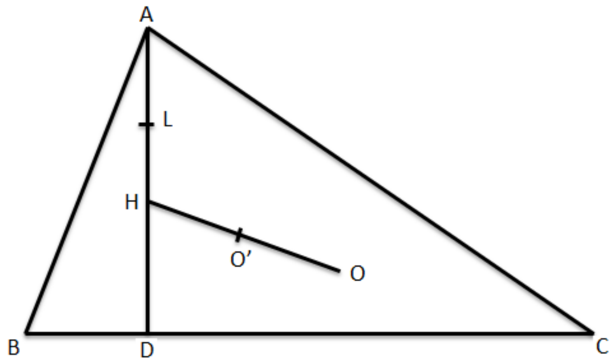
$$\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$$

Observaţie: Dreapta pe care se află punctele O, G, H se numeşte *dreapta lui Euler*.

Teorema 2.6 Fie ABC un triunghi cu O este centrul cercului circumscris, H ortocentrul şi O' mijlocul segmentului [OH] . Atunci are loc relaţia :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OO'}$$

Demonstraţie:



Notăm Cu L mijlocul segmentului [AH]. Rezultă că în triunghiul AOH, O'L este linie mijlocie şi $\overrightarrow{O'L} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$. Din triunghiurile OBO' şi OCO' se obţin egalităţile:

$$\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OO'} \quad şi \quad \overrightarrow{O'C} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OO'}$$

Folosind relaţia lui Sylvester se obţine:

$$\overrightarrow{OO'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\,(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

şi rezultă că

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\,\overrightarrow{OO'}$$

3 Teoreme clasice cu demonstrații vectoriale

Teorema 3.1 (teorema bisectoarei) **:** Bisectoarea interioară a unui unghi din triunghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu lungimile laturilor unghiului.

Demonstraţie:

Fie [AD bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$, D ∈ [BC] şi k = $\frac{DB}{DC}$. Atunci $\overrightarrow{DB} = -k\,\overrightarrow{DC}$.

Deducem:

$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -k\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}\,(1+k) = \overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{AC}$$

de unde rezultă

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

Din egalitatea unghiurilor $\widehat{BAD}$ şi $\widehat{CAD}$ deducem $\cos\widehat{BAD} = \cos\widehat{CAD}$, de unde rezultă

$$\frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle}{\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{AD}\|} \Leftrightarrow \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\rangle}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle}{\|\overrightarrow{AC}\|} \qquad (2)$$

Ţinând seama de expresia (1) a vectorului $\overrightarrow{AD}$ deducem:

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\rangle = \frac{1}{1+k}\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\rangle + \frac{k}{1+k}\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle$$

$$= \frac{1}{1+k} AB^2 + \frac{k}{1+k} AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$$

Analog

$$\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\rangle = \frac{1}{1+k}\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle + \frac{k}{1+k}\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\rangle$$

$$= \frac{1}{1+k} AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC} + \frac{k}{1+k} AC^2$$

Înlocuind în (2) rezultă:

$$\frac{1}{1+k} AB + \frac{k}{1+k} AC \cdot \cos \widehat{BAC} = \frac{1}{1+k} AB \cdot \cos \widehat{BAC} + \frac{k}{1+k} AC$$

De unde :

$$(AB - k \cdot AC)\left(1 - \cos \widehat{BAC}\right) = 0$$

Cum $\cos \widehat{BAC} \neq 1$, deduce $AB - k \cdot AC = 0$, adică

$$\frac{AB}{AC} = k$$

Prin urmare:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Teorema 3.2 (reciproca teoremei bisectoarei) Fie $\triangle ABC$ și un punct D situat pe latura (BC), astfel încât $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Să se arate că (AD este bisectoarea unghiului A.

Demonstraţie:

Notăm $k = \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}, D \in (BC)$

Deducem $\overrightarrow{DB} = -k\,\overrightarrow{DC}$, de unde $\overrightarrow{DB} = \frac{-k}{1+k}\,\overrightarrow{BC}$ sau $\overrightarrow{BD} = \frac{k}{1+k}\,\overrightarrow{BC}$ (1)

Fie $D' \in (BC)$ astfel încât [AD’ este bisectoare. Aplicând teorema direct rezultă

$$\overrightarrow{D'B} = -k\,\overrightarrow{D'C}, \text{ de unde } \overrightarrow{BD'} = \frac{k}{1+k}\,\overrightarrow{BC} \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD'}$ adică D = D’, deci [AD este bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$.

Teorema 3.3 (teorema lui Menelaus):

(Varianta vectorială) Fie triunghiul ABC și punctele M $\in AB$, N $\in$ BC şi P $\in$ AC. Dacă punctele M, N, P sunt coliniare, atunci:

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC}} \cdot \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PA}} = 1$$

Demonstraţie:

Notăm : $p = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$, $q = \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC}}$, $r = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PA}}$

Considerăm reperul cartezian $\mathcal{R} = (A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\})$; în acest reper, pentru care triunghiul ABC este triunghi fundamental, avem A(0,0), B(1,0), C(0,1).

Din $\overrightarrow{MA} = p\, \overrightarrow{MB}$ rezultă $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1-p}\overrightarrow{AA} - \frac{p}{1-p}\overrightarrow{AB} = -\frac{p}{1-p}\, \overrightarrow{AB}$, deci $M\,(-\frac{p}{1-p}\ , 0)$

Din $\overrightarrow{NB} = q\, \overrightarrow{NC}$ rezultă $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-q}\overrightarrow{AB} - \frac{q}{1-q}\overrightarrow{AC}$, deci $N\,(\frac{1}{1-q}\ , -\frac{q}{1-q})$

Din $\overrightarrow{PC} = r\, \overrightarrow{PA}$ rezultă $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{1-r}\overrightarrow{AC} - \frac{r}{1-r}\overrightarrow{AA} = \frac{1}{1-r}\, \overrightarrow{AC}$, deci $P\,(0\, , \frac{1}{1-r})$

Punctele M, N, P sunt coliniare dacă și numai dacă

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{p}{1-p} & 0 & 1 \\ \dfrac{1}{1-q} & -\dfrac{q}{1-q} & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{1-r} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow \dfrac{p}{1-p} \cdot \dfrac{q}{1-q} + \dfrac{1}{(1-q)(1-r)} + \dfrac{p}{(1-p)(1-r)} = 0$

$\Leftrightarrow pq\,(1-r) + 1 - p + p(1-q) = 0$

$\Leftrightarrow pq - pqr + 1 - p + p - pq = 0$

$\Leftrightarrow pqr = 1$

Teorema 3.4 (teorema lui Ceva)

1. (Varianta vectorială) În ΔABC, fie M, N, P pe laturile (AB), (BC), (AC). Dacă AN, BP, CM sunt concurente, atunci

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} \cdot \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC}} \cdot \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PA}} = -1.$$

Demonstraţie:

Notăm : $p = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}}$, $q = \frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NC}}$, $r = \frac{\overrightarrow{PC}}{\overrightarrow{PA}}$

Coordonatele punctelo M, N, P faţă de reperul $\mathcal{R} = (A, \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\})$ se determină printr-un raţionament similar cu cel din demonstraţia teremei lui Menelaus. Se obţine: $(-\frac{p}{1-p}, 0)$, $N\left(\frac{1}{1-q}, -\frac{q}{1-q}\right)$, $P\left(0, \frac{1}{1-r}\right)$.

Ecuaţia dreptei AN se scrie :

$$\frac{x}{\frac{1}{1-q}} = \frac{y}{\frac{-q}{1-q}} \Leftrightarrow qx + y = 0 \qquad (1)$$

Ecuaţia dreptei BP se scrie :

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{1-r}} \Leftrightarrow x + y(1-r) - 1 = 0 \qquad (2)$$

Ecuaţia dreptei CM se scrie :

$$\frac{x-1}{\frac{-p}{1-p}} = \frac{y-1}{-1} \Leftrightarrow (1-p)x - py + p = 0 \qquad (3)$$

Dreptele AN, BP, CM sunt concurente daca şi numai dacă sistemul format din ecuaţiile (1), (2), (3) are soluţie unică în (x,y) adică

$$\begin{vmatrix} q & 1 & 0 \\ 1 & 1-r & -1 \\ 1-p & -p & p \end{vmatrix} = 0$$

Valoarea determinantului de mai sus este:

$$pq\,(1-r) - (1-p) - qp - p = -pqr - 1$$

Deducem că dreptele AN, BP, CM sunt concurente dacă şi numai dacă pqr = -1

4. **Probleme de trigonometrie rezolvate vectorial**

Problema 4.1. Teorema cosinusului sau teorema lui Pitagora generalizată: În orice triunghi ABC cu elementele a, b, c, A, B, C are loc relația: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

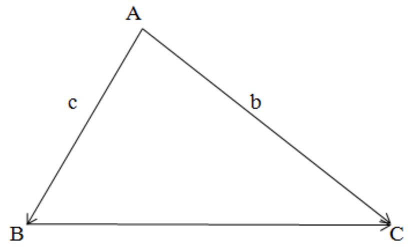
Demonstraţie: Din $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ folosind proprietăţile produsului scalar obţinem $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ sau $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$, căci $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = cb\cos(\not< \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

$a^2 = \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} \rangle\,)\, \langle \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} \rangle + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle - 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle =$

$= b^2 + c^2 - 2 \cdot \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$

Însă $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = 2bc\ \cos A$.

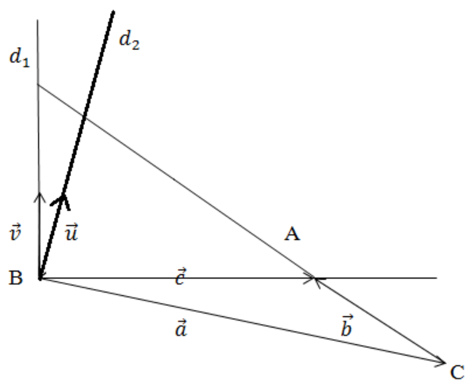
Se obţine $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A$



Problema 4.2 Teorema sinusurilor: În orice triunghi ABC cu elementele a, b, c, A, B, C are loc relația:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Demonstraţie: Fie $\triangle\, ABC$ și direcțiile $d_1 \perp AB,\ d_2 \perp BC$ de versori $\vec{v}$ și $\vec{u}$. Notăm $\overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}, \overrightarrow{BA}=\vec{c} \Longrightarrow \vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; înmulțim cu $\vec{u} \Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{c}=\vec{u}\cdot\vec{a}+\vec{u}\cdot\vec{b}$ aplicând definiția produsului scalar obţinem $1\cdot c\cdot\cos(\vec{u},\vec{c})=1\cdot a\cdot\cos(\vec{u},\vec{a})+1\cdot b\cdot\cos(\vec{u},\vec{b})$ (1). Dar $\cos(\vec{u},\vec{c})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin B$; $\cos(\vec{u},\vec{a})=\cos\frac{\pi}{2}=0$; $\cos(\vec{u},\vec{b})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sin C$ și atunci (1) $\Longrightarrow c\sin B=b\sin C \Longrightarrow \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ apoi $\vec{c}\cdot\vec{v}=\vec{a}\cdot\vec{v}+\vec{b}\cdot\vec{v} \Longrightarrow$ $0=a\cos\left(\frac{\pi}{2}+B\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$ sau $a\sin B=b\sin A$, $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}$.

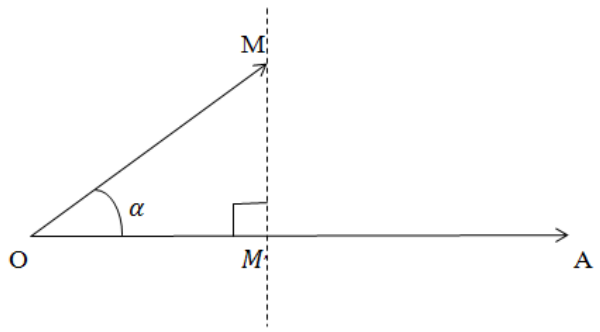


5. Probleme de loc geometric rezolvate vectorial

Problema 5.1 Fie punctele O, A fixate în plan. Se cere locul geometric al punctelor M din plan pentru care $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=k$ (constant).

Soluție: Notîm cu $\mathcal{L}=\left\{M \;\middle|\; \langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\rangle=k\right\}$

Fie M ∈ $\mathcal{L}$ şi M’ proiecţia punctului M pe dreapta OA.



Din ipoteză avem $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM} \rangle = k$. Folosind definiţia produsului scalar, avem:

$$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM} \rangle = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|\overrightarrow{OM}\| \cdot \cos \widehat{MOA} = \|\overrightarrow{OA}\| \cdot \|OM'\| = OA \cdot OM'$$

Prin urmare $\cdot OM' = k$, deci $OM' = \frac{k}{OA} = constant$. Rezultă că M' este un punct fix. Atunci M se poate proiecta în M' fix, numai dacă M se deplasează pe o perpendiculară pe OA și acesta este locul geometric căutat.

Problema 5.2 Fie punctele fixe A, B în plan. Se cere locul geometric al punctelor M din plan astfel încât $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ (constant).

Soluție: Fie $\mathcal{L} = \left\{ M \mid \langle \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \rangle = k \right\}$. Fie O mijlocul segmentului [AB], deci:

$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

Avem $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$

Deducem:

$$\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle = \langle \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} \rangle = \langle \overrightarrow{MO} - \frac{\overrightarrow{AB}}{2}, \overrightarrow{MO} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \rangle =$$

$$= \langle \overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MO} \rangle - \frac{1}{4} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle = MO^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

Dacă M este un punct al locului geometric $\mathcal{L}$, atunci :

$$k = MO^2 - \frac{1}{4} AB^2$$

Adică:

$$MO = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$$

este constant şi se poate determina pentru

$$k + \frac{AB^2}{4} > 0$$

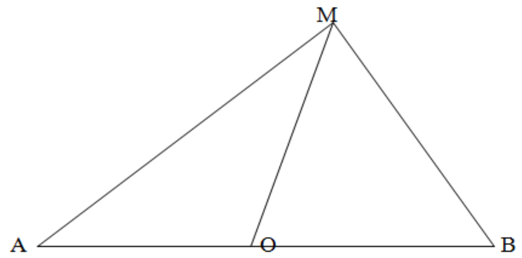
Punctul O fiind fix, rezultă că M aparţine cercului cu centrul O şi rază $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$.

Prin urmare, locul geometric $\mathcal{L}$ este :

i) Mulţimea vidă dacă $k > -\frac{1}{4}AB^2$

ii) Punctual O dacă $k = -\frac{1}{4}AB^2$

iii) Cercul cu centru O şi raza $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$ altfel.



Problema 5.3. Fie A, B două puncte fixe distincte şi k constantă reală. Găsiți locul geometric al punctelor M astfel ca $MA^2 - MB^2 = k$.

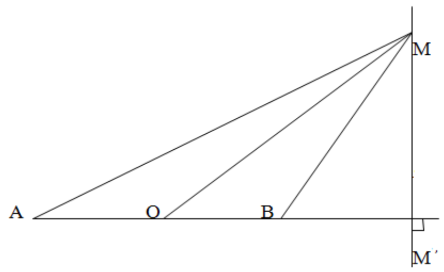
Soluție: Fie O mijlocul lui (AB). Notăm $\mathcal{L} = \left\{ M \mid MA^2 - MB^2 = k \right\}$. Fie M ∈ $\mathcal{L}$, deduce $2\,\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AB} = k$. Rezultă:

$$\frac{k}{2} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{MO}\| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MO}) = AB \cdot OM'$$

Unde M’ este proiecţia lui M pe AB. Deducem :

$$OM' = \frac{k}{2AB} = constant$$

Prin urmare poziţia punctului M’ este fixă pe AB



Problema 5.4 Fie A, B două puncte fixe în plan şi k o constantă pozitivă. Să se determine locul geometric al punctelor M astfel încât $MA^2 + MB^2 = k$.

Soluție: Notăm cu $\mathcal{L} = \left\{ M \mid MA^2 + MB^2 = k \right\}$. Fie C mijlocul segmentului [AB].

Dacă M ∈ $\mathcal{L}$ atunci $MA^2 + MB^2 = 2MC^2 + \frac{AB^2}{2}$ și deci M aparține locului geometric căutat

$\Leftrightarrow k = 2MC^2 + \frac{a^2}{2}$, unde am notat $AB = a \Rightarrow MC^2 = \frac{1}{2}\left(k - \frac{a^2}{2}\right)$. i) Dacă $a^2 > 2k$, locul geometric este $\emptyset$. ii) Dacă $a^2 = 2k$, locul geometric se reduce la punctul C. iii) Dacă $a^2 < 2k$, locul geometric este un cerc de centru C și rază $\sqrt{\frac{2k-a^2}{4}}$.

6 Probleme date la olimpiadele şcolare rezolvate vectorial

Problema 6.1 Fie *ABCD* un patrulater inscriptibil şi *M* un punct pe cercul circumscris acestuia, diferit de vârfurile patrulaterului. Dacă H_1, H_2, H_3, H_4 sunt ortocentrele triunghiurilor *MAB, MBC, MCD* şi *MDA,* iar *E, F* mijloacele segmentelor (*AB*) şi (*CD*), atunci:

a) $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram;

b) $H_1H_3 = 2EF$.

Soluţie: Folosim vectorii de poziţie faţă de *O*.

Avem: $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{r_{H_2}} - \overrightarrow{r_{H_1}} = (\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) - (\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}) = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{AC}$. Analog $\overrightarrow{H_4H_3} = \overrightarrow{AC}$. Deci $\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{H_4H_3}$. În concluzie, $H_1H_2H_3H_4$ este paralelogram.

b) $\overrightarrow{H_1H_3} = \overrightarrow{r_{H_3}} - \overrightarrow{r_{H_1}} = \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{EF}$.

Problema 6.2 Fie *ABC* un triunghi, *G* centrul de greutate şi $M \in (AB), N \in (BC), P \in (CA)$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Notăm cu *D, E, F* centrele de greutate ale triunghiurilor *AMP, BMN, CNP.* Să se arate că:

a) triunghiurile *ABC* şi *DEF* au acelaşi centru de greutate;

b) pentru orice punct *X* al planului, avem : $3XG < XD + XE + XF < XA + XB + XC$.

Soluţie: a) Fie $\frac{AM}{MB} = k$. Faţă de un punct *O,*

$\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_B}}{1+k}, \overrightarrow{r_N} = \frac{\overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C}}{1+k}, \overrightarrow{r_P} = \frac{\overrightarrow{r_C} + k\overrightarrow{r_A}}{1+k}$. Dacă G_1 este centrul de greutate al triunghiului *DEF*, iar *G* al triunghiului *ABC*, atunci

$$\overrightarrow{r_{G_1}} = \frac{\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}}{3} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + 2(\overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{r_N} + \overrightarrow{r_P})}{9} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3} = \overrightarrow{r_G} .$$

b) $3\overrightarrow{XG} = \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{XF}$. Deci $3XG = \left|\overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XE} + \overrightarrow{XF}\right| < XD + XE + XF$ (inegalitatea este strictă deoarece $\overrightarrow{XD}, \overrightarrow{XE}, \overrightarrow{XF}$ un sunt coliniari).

$$XD < \frac{1}{3}(XA + XM + XP), XE < \frac{1}{3}(XB + XM + XN), XF < \frac{1}{3}(XC + XN + XP).$$

$$XM < \frac{XA + kXB}{1+k}, XN < \frac{XB + kXC}{1+k}, XP < \frac{XC + kXA}{1+k} \Rightarrow XD + XE + XF < XA + XB + XC.$$

Problema 6.3 Spunem că o mulţime *A* de vectori nenuli din plan are proprietatea *(S)* dacă are cel puţin trei elemente şi $(\forall)\ \vec{u} \in A, (\exists)\vec{v}, \vec{w} \in A, \vec{v} \neq \vec{w}, \vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.

a) Arătaţi că pentru orice $n \geq 6$, există o mulţime de vectori nenuli, care are proprietatea *(S).*

b) Demonstraţi că o orice mulţime finită de vectori nenuli, care are proprietatea *(S),* are cel puţin 6 elemente.

Soluţie: a) Pentru *n* = 6 considerăm $A = \left\{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}, ..., \overrightarrow{OM_6}\right\}$, unde $M_1M_2...M_6$ este hexagon regulat de centru *O*. Demonstrăm inductiv. Fie $A = \left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}$ o mulţime de *n* vectori care are proprietatea *(S).* Construim o mulţime cu (*n* + 1) vectori, care are aceeaşi proprietate. Dacă $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}, ..., \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_n}$

sunt din *A*, cum sunt distincţi, diferiţi de $\overrightarrow{v_1}$, rezultă:

$\left\{\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}, ..., \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_n}\right\} = \left\{\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, ..., \overrightarrow{v_n}\right\}$, de unde urmează că

$(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) + (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}) + ... + (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_n}) = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + ... + \overrightarrow{v_n} \Rightarrow \overrightarrow{v_1} = \vec{0}$, fals. Prin urmare, există $i \in \{2,3,...,n\}$ astfel încât $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_i} \notin A$, multimea $\left\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, ..., \overrightarrow{v_n}, \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_i}\right\}$ (cu (*n* + 1) elemente) are prorietatea *(S).*

b) Fie $A = \left\{\overrightarrow{OX_1}, \overrightarrow{OX_2}, ..., \overrightarrow{OX_n}\right\}$. Alegem două axe, de versori $\vec{u}, \vec{v}$, neparalele cu nici unul dintre vectorii $\overrightarrow{OX_i}$. Rezultă: $\overrightarrow{OX_K} = a_k\vec{u} + b_k\vec{v}, a_k, b_k \neq 0$.

Mulţimea *M* = $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ are aceeaşi proprietate cu *(S).*

Fie $a \in M$, cel mai mic element. Atunci există *b, c* diferite, *b, c* < 0 astfel încât *a* = *b* + *c* (dacă *b* > 0 sau *c* > 0, a nu poate fi cel mai mic element). Rezultă că *M* conţine cel puţin trei numere negative. Considerând cel mai mare element din M, găsim cel puţin trei numere pozitive în *M*. Rezultă $n \geq 6$.

Problema 6.4 Fie *ABC* un triunghi nedreptunghic, *H* ortocentrul său şi M_1, M_2, M_3 respectiv mijloacele laturilor *BC, CA, AB.* Fie A_1, B_1, C_1 simetricele lui *H* faţă de

M_1, M_2, M_3, iar A_2, B_2, C_2 ortocentrele triunghiurilor BA_1C, CB_1A şi AC_1B. Demonstraţi că:

a) triunghiurile *ABC* şi $A_2B_2C_2$ au acelaşi centru de greutate;

b) centrele de greutate ale triunghiurilor AA_1A_2, BB_1B_2 şi CC_1C_2 formează un triunghi asemenea cu triunghiul dat.

Soluţie: În raport cu *O*, centrul cercului circumscris triunghiului *ABC*, $\overrightarrow{r_H} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}$

Din $\overrightarrow{r_H} + \overrightarrow{r_{A_1}} = 2\overrightarrow{r_{M_1}}$ rezultă că $\overrightarrow{r_{A_1}} = (\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) - (\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}) = -\overrightarrow{r_A}$, deci A_1 este simetricul lui *A* faţă de *O*. Rezultă că $A_1, A_2, A_3 \in C(O, R)$.

a) Fie G_2 centrul de greutate al triunghiului $A_2B_2C_2$ şi *G* centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Atunci avem: .

$$\overrightarrow{r_{G_2}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_{A_2}} + \overrightarrow{r_{B_2}} + \overrightarrow{r_{C_2}}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_{A_1}} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_{B_1}} + \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_{C_1}} + \overrightarrow{r_B}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}).$$

(am folosit $\overrightarrow{r_{A_1}} = -\overrightarrow{r_A}$ etc.). Rezultă $G_2 = G$.

b) Fie G_A centrul de greutate al triunghiului AA_1A_2.

Atunci $\overrightarrow{G_AG_B} = \overrightarrow{r_{G_B}} - \overrightarrow{r_{G_A}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_{B_1}} + \overrightarrow{r_{B_2}} - \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_{A_1}} - \overrightarrow{r_{A_2}}) = \frac{2}{3}(\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$ şi analoagele.

Rezultă asemanarea de raport $\frac{2}{3}$.

Problema 6.5 Fie *ABCD* un patrulater convex, *M* mijlocul lui *AB*, *N* mijlocul lui *BC*, *E* punctul de intersecţie a dreptelor *AN* şi *BD,* iar *F* punctul de intersecţie a dreptelor *DM* şi *AC.* Arătaţi că dacă $BE = \frac{1}{3}BD$ şi $AF = \frac{1}{3}AC$, atunci *ABCD* este paralelogram.

Soluţie: Fie $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{BC} = \vec{v}, \overrightarrow{CD} = a\vec{u} + b\vec{v}$, cu *a* şi *b* numere reale. Rezultă:

$\overrightarrow{AD} = (a+1)\vec{u} + (b+1)\vec{v}, \overrightarrow{AN} = \vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}, \overrightarrow{AE} = \frac{a+3}{3}\vec{u} + \frac{b+1}{3}\vec{v}$. Din $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AN}$ coliniari deucem:

a – 2*b* + 1 = 0. Analog din $\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DM}$ coliniari urmează că 2*a* + *b* + 2 = 0. Rezultă *a* = -1; *b* = 0. În concluzie, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Problema 6.6 Fie triunghiul *ABC* şi punctele *M* pe (*AB*), *N* pe (*BC*), *P* pe (*CA*), *R* pe (*MN*), *S* pe (*NP*) şi *T* pe (*PM*) astfel încât $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}=\lambda$, $\frac{MR}{RN}=\frac{NS}{SP}=\frac{PT}{TM}=1-\lambda$, $\lambda\in(0,1)$.

a) Să se arate că triunghiurile *STR* şi *ABC* sunt asemenea.

b) Să se determine λ astfel încât aria triunghiului *STR* să fie minimă.

Soluţie: a) Faţă de un punct *O*, avem: $\overrightarrow{RT}=\overrightarrow{r_T}-\overrightarrow{r_R}=\frac{\overrightarrow{r_P}+(1-\lambda)\overrightarrow{r_M}}{2-\lambda}-\frac{\overrightarrow{r_M}+(1-\lambda)\overrightarrow{r_N}}{2-\lambda}$.

Deoarece are loc relaţia $\overrightarrow{r_M}=\frac{\overrightarrow{r_A}+\lambda\overrightarrow{r_B}}{1+\lambda}$ şi relaţiile analoage, rezultă: $\overrightarrow{RT}=t\overrightarrow{BC}, t=\frac{1-\lambda+\lambda^2}{2+\lambda-\lambda^2}>0.$ Analog avem: $\overrightarrow{TS}=t\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{SR}=t\overrightarrow{CA}$.

Deci triunghiurile *STR* şi *ABC* sunt asemenea, raportul de asemanare fiind *t*.

b) Raportul ariilor celor două triunghiuri este t^2, deci aria triunghiului *STR* este minimă dacă *t* este minim.

Din $(1+t)\lambda^2-(1+t)\lambda+1-2t=0, \Delta\geq 0\Rightarrow t\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{3},\infty\right]$. Rezultă $t_{\min}=\frac{1}{3}$ pentru $\lambda=\frac{1}{2}$.

Problema 6.7 Pe laturile *AB* şi *AC* ale triunghiului *ABC* se consideră punctele *D* şi *E*, astfel încât

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}=\vec{0}$. Fie *T* intersecţia dreptelor *DC* şi *BE*. Să se determine $\alpha\in R$ astfel încât

$\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\alpha\overrightarrow{TA}$.

Soluţie: Observăm că vectorii $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}$ şi $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}$ au direcţiile vectorilor necoliniari $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$, deci suma lor este vectorul nul dacă şi numai dacă ambii sunt nuli. Rezultă că *D* şi *E* sunt mijloacele segmentelor (*AB*) şi (*AC*), deci *T* este centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Din $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ rezultă $\alpha=-1$.

Problema 6.8 O dreaptă care trece prin *I*, centrul cercului inscris în triunghiul *ABC*, taie laturile *AB* şi *AC* în *P* şi *Q*. Notăm $BC=a, AC=b, AB=c$, $\frac{PB}{PA}=p, \frac{QC}{QA}=q$.

a) Arătaţi că $a(1+p)\overrightarrow{IP}=(a-pb)\overrightarrow{IB}-cp\overrightarrow{IC}$.

b) Arătaţi că $a=bp+cq$.

c) Arătaţi că dacă $a^2 = 4bcpq$, atunci dreptele *AI, BQ* şi *CP* sunt concurente.

Soluţie: a) Din $(p+1)\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IB} + p\overrightarrow{IA}$ si $a\overrightarrow{AI} + b\overrightarrow{BI} + c\overrightarrow{CI} = \vec{0}$, rezultă concluzia.

b) Avem: $a(1+q)\overrightarrow{IQ} = (a-cq)\overrightarrow{IC} - bq\overrightarrow{IB}$. Din *P, I, Q* coliniare, rezultă $\frac{a-pb}{-bq} = \frac{-cp}{a-cp}$,

deci

$(a - pb)(a - cp) = bcpq.$

c) Din $a^2 = 4bcpq \Rightarrow (bp+cq)^2 = 4bcpq \Rightarrow bp = cq$ şi din reciproca teoremei lui Ceva rezultă concurenţa cerută.

Problema 6.9 Fie *ABC* un triunghi dreptunghic în *A* şi *M* un punct pe (*AB*) astfel încât $\frac{AM}{MB} = 3\sqrt{3} - 4$. Să se determine măsura unghiului *B* ştiind că simetricul lui *M* faţă de mijlocul segmentului *GI* aparţine dreptei *AC*.

Soluţie: În raport cu un punct *O*, avem: $\overrightarrow{r_M} = \frac{\overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_B}}{1+k}$, unde $k = 3\sqrt{3} - 4$, $\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3}$, $\overrightarrow{r_I} = \frac{a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}$. Fie *M'* simetricul lui *M* faţă de mijlocul lui (*GI*).

Rezultă $\overrightarrow{r_{M'}} + \overrightarrow{r_M} = \overrightarrow{r_G} + \overrightarrow{r_I}$.

Din faptul că *M'* este situat pe (*AC*) urmează că $\overrightarrow{r_{M'}} = x\overrightarrow{r_A} + (1-x)\overrightarrow{r_C}$, deci avem:

$\frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3}$ + $\frac{a\overrightarrow{r_A} + b\overrightarrow{r_B} + c\overrightarrow{r_C}}{a+b+c}$ - $\frac{\overrightarrow{r_A} + k\overrightarrow{r_B}}{1+k}$ = $x\overrightarrow{r_A} + (1-x)\overrightarrow{r_C}$, de unde obţinem

$\frac{1}{3} + \frac{a}{a+b+c} - \frac{k}{k+1} = 0 \Rightarrow \frac{b}{a+b+c} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$, de unde, ţinând cont şi de teorema lui Pitagora, rezultă $c = \frac{3\sqrt{3}}{2}, b = \frac{9}{2}$ şi măsura unghiului *B* egală cu 30°.

Problema 6.10 Fie *ABCD* un patrulater convex şi *E* punctul de intersecţie a dreptelor *AD* şi *BC*, iar *I* punctul de intersecţie a dreptelor *AC* şi *BD*. Dacă triunghiurile *EDC* şi *IAB* au acelaşi centru de greutate, atunci $AB \parallel CD$ şi $IC^2 = IA \cdot AC$.

Soluţie: Alegem reperul cu originea în *I*, deci $\overrightarrow{r_C} = n\overrightarrow{r_A}$, $\overrightarrow{r_D} = m\overrightarrow{r_B}$, cu *m, n* numere reale.

Din *E, B, C* şi *E, A, D* coliniare rezultă $\overrightarrow{r_E} = x\overrightarrow{r_B} + n(1-x)\overrightarrow{r_A} = y\overrightarrow{r_A} + (1-y)m\overrightarrow{r_B}$, iar de aici urmează că $n(1 - x) = y$ şi $x = (1 - y)m$.

Cum triunghiurile *EDC* şi *IAB* au acelaşi centru de greutate, avem:

$\overrightarrow{r_E} + m\overrightarrow{r_B} + n\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B}$, deci $x\overrightarrow{r_B} + (1-x)n\overrightarrow{r_A} + m\overrightarrow{r_B} + n\overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} \Rightarrow (1-x)n + n = 1$, x + m = 1.

Din relaţiile deduse găsim $m = n$, $n^2 + n - 1 = 0$. Astfel, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_C} = m(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}) = m\overrightarrow{AB}$, deci

$AB \parallel CD$ şi $m < 0$.

Din $\frac{AB}{CD} = \frac{AI}{IC} = -m$ şi

$$m^2 + m - 1 = 0 \Rightarrow \frac{IC^2}{IA^2} - \frac{CI}{AI} - 1 = 0 \Rightarrow CI^2 - CI \cdot AI - AI^2 = 0 \Rightarrow CI^2 = AI(AI + CI) = AI \cdot AC.$$

Bibliografie

1. D. Brânzei , A. Zanoschi , *Geometrie Probleme cu vectori clasa a IX-a*, Editura Paralela 45, Bucureşti, 2002.
2. M Ganga, *Matematică,* manual pentru clasa a IX-a, Editura Mathpress, Ploiești, 2006
3. A. Lupu şi al.: *Vectori în gimnaziu şi liceu,* Editura Optil Graphic, Craiova, 2003
4. C. Năstăsescu, C. Niță și al.: *Matematică,* manual pentru clasa a IX-a, Editura didactică și pedagogică, București, 2001
5. L. Nicolescu, V. Boskoff: *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.
6. V. Nicula: *Geometrie plană (sintetică, vectorială, analitică)*, Editura Gil, Zalău, 2002.
7. S. Noaghi, P. Noaghi : *Rezultate fundamentale în geometria plană și vectorială,* Editura Universitas, Ptroșani 2010.
8. M. Popescu, M. Sterpu: *Geometrie analitică. Teorie şi aplicaţii*, Editura Universitaria, Craiova, 2004.
9. G. Simionescu, V. Ştefănescu: *Aplicaţii ale calculului vectorial în geometrie şi trigonometrie*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1975.
10. K. Teleman , *Manual de geometrie clasa IX - a*, Editura didactică şi pedagogică , Bucureşti, 1978.
11. Gh. Ţiţieca: *Culegere de probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1995.